

從分數除法的例子看螺旋變式課程

孫旭花

澳門大學教育學院

黃毅英

香港中文大學課程與教學學系

林智中

香港教育學院課程與教學學系

本文以小學五年級的分數除法單元為例，呈現螺旋變式課程的特色。螺旋變式設計課程的特色是注意課程難點、更有意識地、更有系統地使用「一題多變」與「一題多解」題組，體現概念連接及方法的連接。一題多變的特點是注重循序漸進，同時注重課程的焦點和難點與數學結構的配合。

關鍵詞：螺旋變式課程、分數除法、小學數學

引言

變式數學教學在中國內地已進行了頗長期的實踐，變式教學研究也成為數學教育的熱點問題之一（青浦縣數學教改實驗小組，1991；張奠

宙，2007；鄭毓信，2006；鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅，2003a，2003b，2003c；聶必凱，2004；顧泠沅，1994）。它與中國學習的傳統有其吻合之處（Sun & Wong, 2006; Wong, 2008）。而基本想法是通過變化去突顯不變的通則，繼而達到了數學教學中「公理化」和「抽象化」的目標（孫旭花，2007a；黃毅英、林智中、孫旭花，2006）。

雖然變式教學於中國內地已實踐多年，但相關研究和理論的探討較多停留於教學層面。相對而言，與變式教學有不少共通點的西方的變異理論（Gu, Marton, & Huang, 2004）則有較強的學習心理學基礎（Marton & Booth, 1997）。我們綜合了雙方理論，並且配合數學學習的本質，把之轉化成課程設計原理。螺旋變式課程設計模型，是基於中國數學教學實踐的揚長避短的模式。主要根據中國數學教學中，自然地使用「問題變式」實踐策略，就是通過「一題多解」（解法連接的問題變式）和「一題多變」（概念連接的問題變式）去佈置教學（孫旭花，2007b；孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙，2006; Sun, Wong, & Lam, 2005）。

學生在學習之初，我們需要設計不同的學習情境，包括日常生活情境，去引入數學內容。透過現實情境的變，引導學生歸納出不變的通則、概念或技巧。我們稱這些情境的變為「歸納變式」。

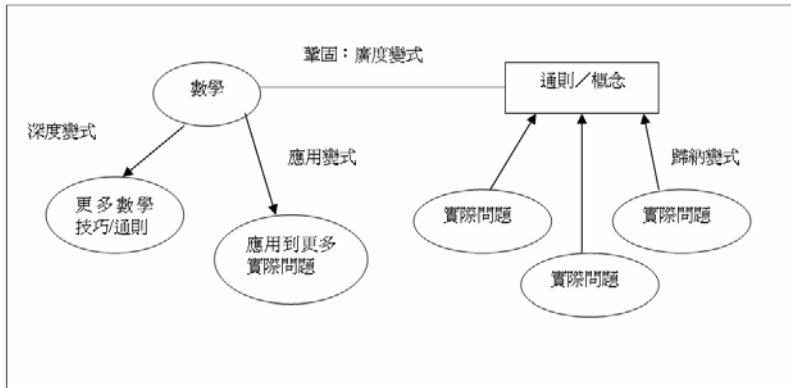
在通則或概念形成之後，學生需要熟習。我們透過有系統的變化給學生演練數學題，以鞏固其中涉及的技巧。其中包括數字上的變，或所呈現形式的變等。但當中不涉及新的技巧，我們稱之為「廣度變式」。

技巧鞏固了後，我們透過數學題形式或內容的變，引進更多的相類的技巧。例如由整數除法推廣到分數除法等。雖然均只涉及單一的除法概念，但不論對除法的理解和技巧都不同了。這就涉及「深度變式」。

最後，我們把學得的技巧、通則等，應用到更多的情境中，這種變稱之為「應用變式」（圖一）（詳見黃毅英、林智中、孫旭花，2006；黃毅英、林智中、陳美恩，王艷玲，2008）。

這四種變式是變式數學課程的基本元素。

圖一：變式數學課程基本框架



由於整個設計利用變式題由具體帶到抽象，再反過來進行進一步的抽象化，形成一個學習螺旋，是以名為螺旋變式課程（孫旭花，2007a，2007b；黃毅英、林智中、孫旭花，2006）。值得一提的是，這裡以「螺旋式」展開教學和布魯納的以「螺旋式」展開課程有所不同。布魯納提出的螺旋課程（spiral curriculum），主張將課程內容按照年級上升而做多次循環，是針對課程單元設計，而這裡「螺旋式」展開課程是針對一節課和一個難點的核心，循序漸進通過變化問題突出這個「核心」。

除了上述的設計原理外，我們更須了解如何將螺旋變式課程理念應用在實際的課程及教學設計上。黃毅英、林智中、陳美恩、王艷玲（2008）一文已對速率、體積、棒形圖三個小學數學課題的變式課程設計作出解說。本文嘗試以這套理念來設計另一個小學數學課題：分數除法。它恐怕是小學數學最大的難點之一。這四個課題均曾實際施教，且得到最佳之教學效果（見 Wong, Lam, Sun, & Chan, 2009）。由於分數除法是小學數學中最大難點之一，它更能突顯螺旋變式課程的優點。因此本文集中探討這一課題，不只鉤劃其中的設計，而是藉之展現螺旋變式課程的特色。

圖二：變式教與學十課堂

課堂一：整數除以整數
課堂二：分數除以整數
課堂三：整數除以分數
課堂四：「顛倒法」及「通分法」各施其法
課堂五：分數除以分數
課堂六：置換信息
課堂七：區分結構要素
課堂八：帶分數的除法法則
課堂九：區分情境
課堂十：總結

如上所述，變式教學並非全新的教學方式，而是優化現存的教學設計，將其中一些地方加以強化、理順和細緻化，所以在設計之前，我們先分析和參考了香港全部小學數學教材及內地共二十多本教材，並在這基礎之上，設計我們的教材（圖二）。以下闡述螺旋變式課程的特色。

變式課程的特色

1. 強調「變中的不變」


以螺旋變式教材的主要理念「變中發現不變」來學習抽象化，和「以不變應萬變」來學習公理化，主要突出教材的難點，「變中發現不變」，即強調教材的不變元素，圍繞難點，使得教材焦點與難點重合，使難點不難、重點不重。

分數除法的難點是解釋為甚麼「除以一個數等於乘以它的倒數」（通稱之為「顛倒法」），但現行的教材沒有清晰地解釋為甚麼「除以一個數等於乘以它的倒數」這一難點，而是把重點放在傳授如何顛倒的技巧，並應用該技巧去解題。而螺旋變式設計教材中的重點，除了展示如何顛倒的技巧，還把重點放在幫助學生瞭解為甚麼顛倒，即除法運算為甚麼轉化為乘運算。我們的做法是先重溫整數除法，透過問題的變

式及情境之配合，首先了解特定的 $\frac{1}{2} \div \text{整數}$ （分半個餅）的情況（圖三），再由此引申 $\frac{1}{\text{整數}} \div \text{整數}$ 。由這些變化已初步歸納出 $\frac{1}{p} \div q = \frac{1}{p} \times \frac{1}{q}$ （ p, q 為正整數）的這個「不變」的規律。從此再由情境推廣至整數 $\div \frac{1}{\text{整數}}$ 、整數 \div 分數、分數 \div 整數，最後分數 \div 分數的各種情況。在題型的變中均歸納出不變的顛倒法則。

圖三：半個餅分給四個人的例子

來看看以下的例子吧。
分餅：媽媽有「半」個餅分給小朋友，若果：




（每人可分得餅）

$$\frac{1}{2} (\text{餅}) \div 4 (\text{人}) = \underline{\hspace{2cm}} (\text{個})$$

概念理解：
一共半個餅，分給 4 人

或 另一種想法



$\frac{1}{8}$ (個)

分給 4 人就是每人分得總數的 $\frac{1}{4}$ ，
一共半個餅，所以每人分得 $\frac{1}{8}$ 個。

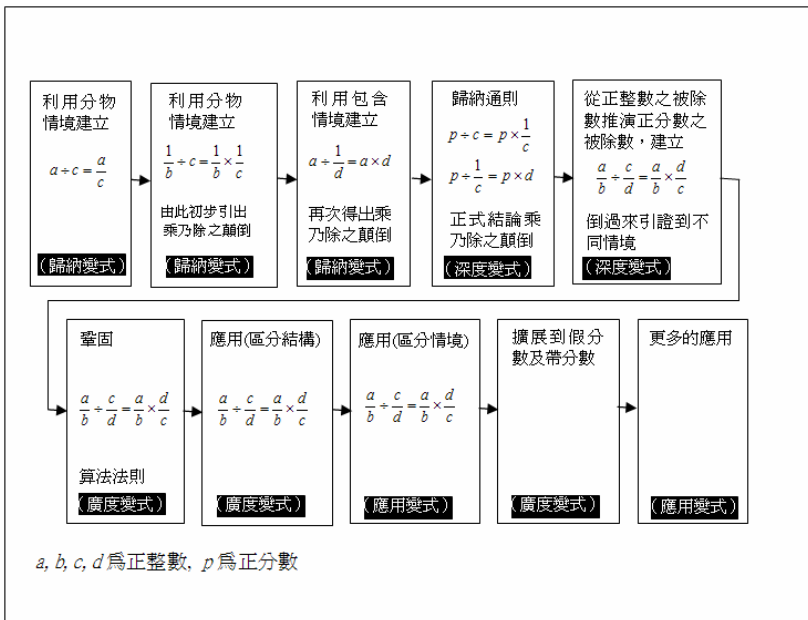
列式表示： $\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$

列式表示： $\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

2. 從多個連接點：由情境轉化到算式

以上做法能讓學生細步漸進、自然而然的掌握，不須死記硬背便能明白其中的道理。此外，我們不只從一個點讓學生從實際分物、包含等情境歸納出「顛倒法則」，而是在不同題型中都得出同樣的結論，是以能更加鞏固學生的認識（Wong et al., 2009）（圖四）。


圖四：分數除法設計概念圖



圖五：每碟四分一個餅的迷思

思考題：你有試過以下類似的情況嗎？

每 $\frac{1}{4}$ 個餅放一碟，2 個餅需幾個碟子？



列式提示： $2 \div \frac{1}{4} = ?$

列式： 共需碟子= =

我們首先用分半個餅的處境（圖三）讓學生得到「顛倒法」的結論，這是局限於「 $\frac{1}{2} \div \text{整數}$ 」的情況，再用「 $\frac{1}{4}$ 個餅放一碟，2個餅需幾個碟子」等包含情境（圖五）。於「 $\text{整數} \div \text{分數}$ 」的情況再次得出同一結論（圖六、七）。我們還可多用幾個情況（如所圖四所示的 $\frac{1}{b} \div c$ ， $a \div \frac{1}{d}$ ， $p \div c$ ， $p \div d$ 等，其中 a, b, c, d 為正整數）於幾個（而非一個）點重複得到顛倒式的結論。

圖六：一個數除以整數的結論

總結：分半個餅

答案是 兩式所算的答案相等，並以下列的式子來表示。


$$\text{一個數} \div \text{整數} = \text{一個數} \times \frac{1}{\text{整數}}$$

若分給4個人，意思就是每人分得總數的 $\frac{1}{4}$ 。

所以兩種列式相等。

我們可稱呼這方法為


顛 倒 法
簡單而言：分若干份就是取它的若干份之一，前者是除法，後者是乘法。兩種列式相等。



圖七：一個數除以分數的結論

總結：分半個餅

答案是 $\text{一個數} \div \frac{1}{\text{整數}} = \text{一個數} \times \text{整數}$

我們可稱呼這方法為 

顛倒法
和上節課內容比較， $\text{一個數} \div \text{整數} = \text{一個數} \times \frac{1}{\text{整數}}$ ，

是一致的。 $\text{一個數} \div \frac{1}{\text{整數}} = \text{一個數} \times \text{整數}$ ，也是顛倒法。

3. 不同方法的連繫

螺旋變式設計教材除了經常運用變式題組外，亦提供了「一題多解」題組。例如除了顛倒法外，螺旋變式教材還設計通分法，來分散分數除法運算理解的難點。抓住「化異為同」的解題思路來組織教材設計，提出通分法的法則就是以分數加減通分母作類比。例如

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} \div \frac{3}{7} \\ &= \frac{5 \times 7}{\boxed{6 \times 7}} \div \frac{3 \times 6}{\boxed{6 \times 7}} \\ &= \frac{5 \times 7}{3 \times 6} \end{aligned} \quad \leftarrow \text{（共同分母可以不理）}$$

這種處理方式（數學方法）在小數除法也出現過，在開始學習小數除法時，可以用 $2.4\text{m} \div 6$ 之類引入，轉換單位後，就變成整數除法 $240\text{cm} \div 6$ 了，由此可以看到其中數學方法的共通之處（詳見黃毅英、林智中、孫旭花，2008）。

4. 不同概念技巧間的連繫

除了上述之不同方法的連繫外，我們更有意識地、加強整個相關概念和技巧的連繫。

(a) 分數除法與整數除法的區別和連繫

我們首先從整數除法出發，讓學生重新訂定被除數 \div 除數=商（圖八）的關係，先撇除餘數的情況，讓學生較容易過渡到分數除法。此外，如上所述，在及後的學習中，我們基本上是將 $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$ 的情況分析成整數

的情況，如 $\frac{1}{b} \div c$, $a \div \frac{1}{d}$ 等。即是對於 $p \div q$ ，把 p, q 先規限在其中一個為整數或 $\frac{1}{\text{整數}}$ 的形式出現，於是分數與整數的情況得以連繫起來。這

也達到以舊引新的基本思想，如：

題組：整數相除與分數相除的區別

6個餅分給3人，每個人可分得2個餅。

6個餅分給4人，每個人可分得 $6/4=1.5$ 個餅。

題組：分數除法和整數除法的共同點：把一個量分為若干份，求其中的一份是多少？

例如：5個蘋果，共吃了 $7/4$ 天，每天吃多少個？

6個蘋果，共吃了2天，每天吃多少個？

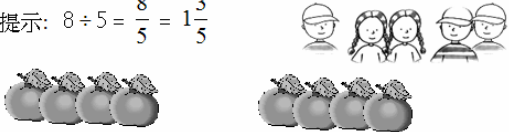
這樣整數除法和分數除法得以互相類比，概念與技巧更加鞏固。

圖八：分蘋果的思考

思考題：你有試過以下類似的情況嗎？

分蘋果 爸爸有蘋果 8 個，子女現在共 5 人。
若將蘋果平均分給子女，每人可分蘋果多少個？

列式提示： $8 \div 5 = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$



上一課你們學了整數除以整數，
細心看看列式，你可發現些甚麼？

當整數除以整數，但除不盡時，
答案是以分數的形式表示出來（不用寫餘數了）。

溫馨提示：被除數（整數） \div 除數（整數）= 商（分數）

(b) 除法和乘法的連繫

螺旋變式教材包含大量促進除法和乘法概念連接的教材設計。例如上面分半個餅的情況，除了 $\div c$ （分給 c 個人外），亦可理解為整份的一半、 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{4}$ 等。因此得到 $\div c = \times \frac{1}{c}$ 的結論。也是進一步將乘法和除法連繫起來（圖九）。又以題組

- 每 $\frac{1}{4}$ 個餅放一碟等於 1 個餅放 4 碟，
 每 $\frac{1}{2}$ 個餅放一碟等於 1 個餅放 2 碟，
 每 $\frac{1}{3}$ 個餅放一碟等於 1 個餅放 3 碟，
 每 $\frac{1}{1}$ 個餅放一碟等於 1 個餅放 1 碟，

深化「除法轉換為乘法」的關係。我們又透過以下題組讓學生討論三者之間的關係甚麼變了？甚麼不變？區分除法和乘法關係的結構。

圖九：除法規律小發現

思考題：除法規律小發現

分給人數	每個人分得多少個？ (除法列式)	或	分給 1 人就是 每人分得總數的	一共半個餅 (乘法列式)
1 人	$\frac{1}{2} \div 1 = \frac{1}{2}$	←→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{2}$
2 人	$\frac{1}{2} \div 2 = \frac{1}{4}$	←→	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
3 人	$\frac{1}{2} \div 3 = \frac{1}{6}$	←→	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$
4 人	$\frac{1}{2} \div 4 = \frac{1}{8}$	←→	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$

1. 你可發現了甚麼，概括為一句話可以嗎？
(溫馨提示：答案、運算符號及除數相同嗎?)
2. 為甚麼兩種列式相等？
3. 人數越多，每人分得的個數越
除數越大，商越

題組：

4 個餅，2 個分一碟，共分多少碟？

4 個餅，共分？碟，每碟有 2 個餅？

要多少個餅，才可以 2 個餅分一碟，共分 2 碟？

題組：

$\frac{3}{4}$ 個餅， $\frac{3}{8}$ 個分一碟，共分多少碟？

$\frac{3}{4}$ 個餅，？個分一碟，共分 2 碟？

？個餅， $\frac{3}{8}$ 個分一碟，共分 2 碟？

(c) 被除數和除數的連繫

螺旋變式教材包含大量區分被除數和除數的規律問題組設計，如區分被除數和除數的數量關係，區分被除數和除數的表述、位置，區分被除數和除數大小與商的關係。下面的題型概括出區分被除數和除數的規

律：總量是被除數，分量是除數。這裏特別更正學生的錯誤觀念：大的數量是被除數，小的數量是除數。

題組：區分下列各題，哪個是被除數？哪個是除數？

4 個餅，2 個分一碟，共分多少碟？

2 個餅，4 個分一碟，共分多少碟？

4 個分一碟，共 2 個餅，共分多少碟？

題組：區分被除數和除數的表述、位置。

1/4 餅放一碟，現有兩個餅，共需多少碟？

1/14 個餅放一碟，現有兩個餅，共需多少碟？

薄餅 1/16 分 1 碟，6 個薄餅共需要多少碟？

題組：區分被除數和除數大小與商的關係。

比較以下數目大小，在 ○ 添上大於 > 和小於 < 號，你應該不用計算也能找到答案。

$$31/2 \div 17 \quad \bigcirc \quad 31/2 \div 4,$$

$$23 \div 8 \quad \bigcirc \quad 23 \div 2$$

5. 讓學生推廣數學規律

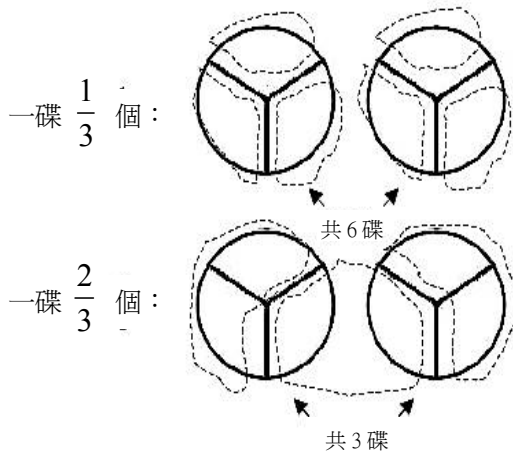
從上面分析半個餅的情況，其實只能得出 $\frac{1}{2} \div c$ ，但透過情境的變化，讓學生探討 $\frac{1}{3}$ 個餅、 $\frac{1}{4}$ 個餅等（提供多少情況當然視乎學生的掌握，要點是讓學生能看出其中不變的規律，總結出 $\frac{1}{b} \div c$ 的情況）。同理由 $\frac{1}{2}$ 個餅放一碟的情況，推廣至 $\frac{1}{3}$ 個餅放一碟， $\frac{1}{4}$ 個餅放一碟等，得出有關 $a \div \frac{1}{d}$ 的顛倒法。

6. 從生活情境歸納出數學原理及多元情境的運用

上面已闡述利用分半個餅及「每半個餅放一碟」的情況引入顛倒法則。這些都是生活情況，我們亦進而利用這些情境處理

$$\text{一個數} \div \frac{k}{\text{整數}} = \text{一個數} \times \frac{\text{整數}}{k}$$

的情況，即



螺旋變式教材設計注重情境的變化：題組包含等分除情境、部分整體情境、面積周長情境三種情境的區分。同時也利用題組由分數乘法概念引出分數除法新概念。例如：

部分整體情境題組：

一根 5 米的繩子，分爲 4 段，每一段多少米？每一段佔繩子的幾分之幾？

(i) 若 5 米長的繩子以 $\frac{2}{5}$ 截用來跳繩，截走了多少米？

(分數乘法應用)

(ii) 若剛截來的繩子長 12 米，佔全長的 $\frac{1}{3}$ ，原來的繩長多少米？

(分數除法題)

(iii) 若用這 12 米的繩子圍成矩形，已知矩形長 2 米，那麼寬是多少米？寬是長的多少倍？寬是周長的幾分之幾？周長是寬的幾倍？

又例如：

題組：區分等分除、分數概念、分數除法的應用。

一條 50 克的巧克力，分為 4 塊，每一塊佔整個巧克力幾分之幾？每一塊又重多少克？



想一想，“ $\frac{2}{3}$ ”可以變為整數嗎？甚麼不變？解法一樣嗎？分數除法有甚麼秘訣呢？

續上題，若 $\frac{1}{3}$ 塊巧克力重 50 克，每一塊多少克？

若 $\frac{2}{3}$ 塊巧克力重 50 克，每一塊多少克？

除了情境本身的多元化外，最後又引導學生將技巧應用到更多的情境中，如：

螺旋變式教材包含許多讓學生自己變「情境」的情境變式，促進學生在數學學習中，把分數除法概念應用於情境中，香港常用教材極少包含類似題組。例如：

* 把情境變陌生（數字不變）： $\frac{3}{4}$ 個餅， $\frac{3}{8}$ 個分一碟，共分多少碟？

例：買一枝筆需要 $\frac{3}{8}$ 泰國銖， $\frac{3}{4}$ 泰國銖可買多少枝筆？

* 把情境變熟悉（數字不變）：

例：三文魚手卷一件需白飯 $\frac{3}{8}$ 公斤，壽司師傅煮了 $\frac{3}{4}$ 公斤，可做三文魚手卷多少件？

- * 請同學編一道分數除法題，使情境變得陌生，數字或許複雜，然後變回熟悉的情境，數字簡單。討論甚麼變了，甚麼不變。

其中甚至涉及情境的不斷變化，例如：

源題： $3/4$ 個餅， $3/8$ 個一碟，共分多少碟？

倘若每一碟，配 $1/5$ 升奶茶，共需奶茶多少升？

變為 $3/4$ 個餅共需 $3/2$ 公斤麵粉，每碟需麵粉多少公斤？

$16/9$ 個餅，共 $9/2$ 公斤麵粉，每個多少公斤麵粉？

7. 多重表徵

而螺旋變式教材，以多重表徵體現較高層次的數學思維。例如：

- * 文字表徵：若分給 4 個人，那麼，每個人可分得多少個餅？

_____（個）

- * 除法列式表徵： $1/2 \div 4 =$ _____

- * 圖像表徵：



- * 乘法列式表徵：若分給 4 人就是每人分得總數的幾分之幾，一共半個餅，所以每人分得餅多少個？_____（個）等等。

8. 主動建構

螺旋變式教材的幾個章節都包含編題目和變题目的類似活動，強調主動建構概念。螺旋變式教材的設計舉例如下：

- *請同學編一道分數除法題，使情境變得陌生，數字或許複雜，然後變回熟悉的情境，數字簡單。討論甚麼變了，甚麼不變。

出示源問題：

$\frac{3}{4}$ 個餅， $\frac{3}{8}$ 個分一碟，共分多少碟？請同學編題，給其他同學來講解。

- * 把源問題的數字變為帶分數。編題：_____。
- * 把數字變為真分數。編題：_____。
- * 把數字變為分子為 1 的真分數。編題：_____。
- * 把數字變為整數（分母為 1 的分）。編題：_____。
- * 設計兩題，商是整數和分數的除法應用題。
- * 設計一條 $\frac{1}{4}$ 乘以 3 等於 $\frac{3}{4}$ 的分數乘法應用題。

從這個意義而言，螺旋變式教材更強調主動建構概念。

結論

正如我們一再提出，螺旋變式課程並不是截然不同的課程或教學法。其優點是建基於原有的教學流程加以優化，並非將中國及香港慣常的教學方式推倒重來，而是將之優化、細緻化及理順一些難點。

是以這類設計的第一步，即是分析整課的難點。以分數除法而言，恐怕就是顛倒法的建立。如何讓學生既不至於生吞活剝這道法則，但又能從學生生活情境（分物及包含）中過渡到算式運算。分析現有的教材，我們發現一些教科書可能太早轉移到算式，有可能導致不求甚解。另一些卻在生活情境中消磨太久，學生可能會感到渾雜。我們採取的辦法就是透過變式分散難點，將顛倒法分成 $\frac{1}{b} \div c$ 、 $a \div \frac{1}{d}$ 等情況，不只循序漸進的引出顛倒法，更讓學生從幾個點（不是一個點）由生活情境過渡到算式。

此外我們進一步配合螺旋變式課程的原理，首先從學生情境，以變帶出不變的通則，然後從題型的變移帶出新的通則，其中透過數學題形式的變移以鞏固技巧，又再一次變化情境，把通則應用到更多的情境來。

在過程中，我們也透過這些變化做到一題多解，並將不同的概念與技巧流暢地連繫起來，再透過學生自行產生變化，自行從源題設計變化題，做到學生主動建構。

以上只是其中一個課題的設計，其他課題的設計可參考黃毅英、林智中、陳美恩、王艷玲（2008），這些課題均經過實踐，並且得出滿意的效果（Wong et al., 2009）。不過這些也只是個別課題的例子，實際的施教仍要教師按實際情況掌握（如變多少，多頻密等……）；再者，我們不應只按一些已設計好的課題照本宣科，而是應融會上面所闡述的原理和實踐經驗，這樣就不難對更多的課題作出更有效的教學設計了。

鳴謝

本文部分研究得到現代教育研究社資助，謹此鳴謝。

參考文獻

- 青浦縣數學教改實驗小組（1991）。《學會教學》。北京：人民教育出版社。
- 孫旭花（2007a）。《螺旋變式數學課程設計：理論與實踐》。未公開發表哲學博士論文，香港中文大學教育學院。
- 孫旭花（2007b）。〈螺旋變式數學課程之還原理念簡介——以青浦變式教學中「以新歸舊」概念理解教學實踐為例〉。《臺灣數學教師電子期刊》，第12期，頁17-32。
- 孫旭花、黃毅英、林智中、張奠宙（2006）。〈問題變式：結構與功能的統一〉。《課程·教材·教法》，第26卷第5期，頁38-42。
- 張奠宙（2007）。《中國數學雙基教學》。上海：上海教育出版社。
- 黃毅英、林智中、孫旭花（2006）。《變式教學課程設計原理：數學課程改革的可能出路》（學校教育改革系列之33）。香港：香港教育研究所。
- 黃毅英、林智中、孫旭花（2008）。〈分數除法「變式教學」試教的一次反思〉。《數學教育期刊》，第43期，頁5-7。
- 黃毅英、林智中、陳美恩、王豔玲（2008）。〈數學變式課程設計——以小學三個課題為例〉。《教育學報》，第35卷第2期，頁1-28。
- 鄭毓信（2006）。〈變式理論的必要發展〉。《中學數學月刊》，第1期，頁1-3。
- 鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003a）。〈變式教學研究〉。《數學教學》，第1期，頁11-12。
- 鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003b）。〈變式教學研究（續）〉。《數學教學》，第2期，頁6-10。
- 鮑建生、黃榮金、易凌峰、顧泠沅（2003c）。〈變式教學研究（再續）〉。《數學教學》，第3期，頁6-12。
- 聶必凱（2004）。《數學變式教學的探索性研究》。未公開發表哲學博士論文，華東師範大學，上海。
- 顧泠沅（1994）。《教學實驗論——青浦實驗的方法與教學原理研究》。北京：教育科學出版社。

- Gu, L., Huang, R., & Marton, F. (2004). Teaching with variation: An effective way of mathematics teaching in China. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders*. Singapore: World Scientific. [中譯] 顧泠沅、黃榮金、馬頓 (2005)。〈變式教學促進有效的數學學習的中國方式〉。載范良火、黃毅英、蔡金法、李士錡 (編), 《華人如何學習數學》(頁 247–273)。南京: 江蘇教育出版社。
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sun, X., & Wong, N. Y. (2006). The “soil” of extended problems: The cultural background of the Chinese mathematics teaching practice. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehliková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, p. 339). Prague: PME.
- Sun, X. H., Wong, N. Y., & Lam, C. C. (2005). “Bianshi” problem as the bridge from “entering the way” to “transcending the way”: The cultural characteristic of “bianshi” problem in Chinese math education. *Journal of the Korean Society Mathematical Education Series: Research in Mathematical Education*, 9(2), 153–172.
- Wong, N. Y. (2008). Confucian heritage culture learner’s phenomenon: From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 40, 973–981.
- Wong, N. Y., Lam, C. C., Sun, X., & Chan, A. M. Y. (2009). From “exploring the middle zone” to “constructing a bridge”: Experimenting the spiral *bianshi* mathematics curriculum. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 7(2), 363–382.

Using the Topic of Division of Fraction as an Example to Illustrate the Features of the Spiral “Bianshi” Curriculum

Xuhua SUN, Ngai-Ying WONG, and Chi-Chung LAM

Abstract

This article makes use of division of fraction, a topic in Primary 5, as an example to illustrate the features of the spiral “bianshi” curriculum. The main characteristic of the curriculum is its focus on the difficulty of the problem and the more deliberate and systematic use of the “one problem, many variations” and “one problem, multiple solutions” approach to show how concepts and methods are connected. The approach stresses scaffolding of learning and at the same time emphasizes the integration of the curriculum focus and problem difficulty within the context of mathematical structures.

孫旭花，澳門大學教育學院助理教授。

黃毅英，香港中文大學課程與教學學系教授。

林智中，香港教育學院課程與教學學系教授。

聯絡電郵：xhsun@umac.mo