

數學變式課程設計—— 以小學三個課題為例

黃毅英

香港中文大學課程與教學學系

林智中

香港教育學院課程與教學學系

陳美恩

荔枝角天主教小學

王豔玲

東北師範大學附屬小學

從過往的研究和學習理論來看，變式課程可以為數學學習建立「過程」與「內容」之間的橋樑；亦即是說，能在提升高層次思維能力及共通能力之餘，亦不會丟失堅實的學科基礎。本文嘗試選擇高小三個課題（速率、立體體積及棒形圖），按變式教學理念發展出具體的教材，以說明變式課程的設計理念。

近年各國均不約而同進行教育改革（李子建，2002），數學教育亦不例外，各地紛紛推出新課程。雖然各地新課程的數學內容不盡相同，改革步伐亦各異，但綜觀相關文件，不難發現有不少共通的地方（詳見黃毅英，2004，2005b；Wong, Han, & Lee, 2004）。

其中改革的原動力當然不止於「2000」（即新世紀）這個數字，更因為「世界變了」。在全球經濟一體化及「知識型社會」的轉型過程中，「工種」與工作性質亦變了。無人可以預計學生離開學校時需要些甚麼知識與技能，所以學校的任務轉變為培養學生終身學習的基礎（Delors, 1998; Mathematics Sciences Education Board, 1989; Organisation for Economic Co-operation and Development, 1996），乃至培育下一代具備塑造屬於他們自己一代社會的能力（黃毅英, 1995）。故此，學會學習、全方位學習，包括創新能力的高層思維，都踏進了教育改革的舞臺，而衍生了輕具體知識、重思維能力，重視「價值」、態度，鼓吹跨學科學習等一大堆想法。然而，要騰出時間施行這些新意念，便須引伸到課程統整、核心課程、共通能力、基礎能力、達成指標等的具體措施。

隨着普及教育的推行，如何照顧個別差異，如何讓學生能一步步按自己的學習節奏前進，如何在提升高層次思維能力及共通能力之餘又不會丟失堅實的學科基礎，以及如何在「過程」與「內容」之間找到平衡，遂變成了最核心的問題。

香港中小學數學課程的發展與前瞻

縱觀香港中學數學課程改革，以 20 世紀 60 年代的「新數學運動」和 90 年代的「目標為本課程」較為人注目。不過從課程歷史來看，小學數學課程在 60 年代亦進行了一場改革。有趣的是，60 年代的小學數學課程改革、中學新數學運動，以及 90 年代的目標為本課程，三者之間是有着微妙關係的。

新數學的理念於 20 世紀 60 年代初引進香港，隨後風靡香港數學教育界。當時，很快便有一套本地的新數學教科書出版了，而中學會考亦加以配合，制訂「課程乙」。新數學着重數學結構、自我發現與概念形成，其中大量引入了符號邏輯、集合論、關係、函數、幾何變換、數導、統計與概率等新課題（有關歷史詳見黃毅英、黃家樂，2001）。

至於 20 世紀 90 年代所提出的目標為本課程，目的是要回應普及教育衍生的種種問題，訂立學習目標及相關評估。理論上，這是為學習者訂定學習階梯，讓他們可以按目標一步步前進。每一步又透過目標評估，以了解學生是否準備好學習下一步；中間又引入課業的理念，希望把數學融入實際處境中（Clark, Scarino, & Brownell, 1994）。

在這兩場改革之外，20 世紀 60 年代中至 80 年代初，小學數學課程亦進行了一場規模不小的改革，其主軸為「兒童為中心的數學學習」。

1960 年，納菲爾特（Nuffield）數學教學實驗計劃及其他「以兒童為中心」的同類實驗計劃在英國正進行得如火如荼。這些實驗計劃背後的理念可以用英國數學學會在 1955 年發表的報告來概括：只有通過不同的遊戲、實驗、具體實物的操作等，兒童才會從「活動」和「經驗」中慢慢體驗到事物的關係，從而建立數與形的概念以至基本的數學思維模式（Mathematical Association, 1955）。

香港小學數學課程發展人員當年把「以兒童為中心」的數學教學理念引入，於 1967 年成功將當時的小學算術課程拓闊為小學數學課程。隨着十進制於 1970 年初引入，透過刪減課程中繁複的兌換題，騰出空間，在課堂中進行兒童探索式的活動。而隨着 1972 年試行活動教學，「以兒童為中心」的數學教學在教師教育、研討會與專業團體活動中得到試驗與實踐（詳見鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂，2006）。

小學納菲爾特教學實驗、中學新數學運動，以至後期的目標為本課程，表面上看似互不相關，但從普及教育與社會轉型的視角卻可以看到當中的主線與共通點，如：

- 教育面對所有學生，面對學生學習動機參差，數學學習要做到「沒有眼淚」¹；
- 要讓學生變成學習的主體，減少「注入式」（灌輸）的教學；
- 讓學生自我探索，「再發明」（re-invent）數學；
- 與此同時，不要讓學習放任自流，要制訂學習目標；
- 學生能按個別需要，循着這些學習目標前進，用這個方法處理學習差異；

- 於轉型的社會中，零碎知識變得不重要，要「學會學習」，着重高層次的思維能力和數學的知識結構。

以上改革可謂非常合理，但當中卻涉及「p 與 p」的課題，其中一個 p (product) 表示學習結果，包括學習內容 (content)；而另一個 p (process) 則表示學習過程，包括所謂的「過程能力」。這個討論，至少可追溯到 1975 年美國檢討「新數學運動」得失的報告書 (National Advisory Committee on Mathematics Education, 1975)，當中提出不應將 p 和 p 看成對立面 (dichotomy)。1986 年，國際數學教學委員會 (International Commission on Mathematical Instruction, ICMI) 科威特研討會中前瞻 20 世紀 90 年代的數學教育，對所謂「過程為本課程」(process-based curriculum) 有不少批評，最後得出的結論是要在「p 與 p」之間找出平衡 (Howson & Wilson, 1986)。

究竟過程與結果如何平衡？再進一步，「怎樣在教授數學知識的同時，以之作爲培養深層能力的基礎」(黃毅英, 1995, 頁 71)？香港以至世界各地未來數學課程發展的重點之一，可能正是如何搭建由基礎知識通往高層次能力之路。

華人學習數學基本模式對世界的啟示

近數十年華人在世界上表現出的卓越成就 (尤以數學科)，使全球學者均在探視華人學習模式 (Wong, 2004) 及優效教學的文化潛力 (cultural potential)。Huang (2002) 就曾經試圖描繪華人數學課的一幅情景圖如下：「課堂中有教師、有學生、也有數學，教師通過提供適當的『腳手架』(scaffold)，提出一系列富啟發性的問題，把數學內容呈現給學生，幫助學生投入於探索數學的過程之中」(頁 237)。Watkins & Biggs (2001) 則指出，在一個上佳的、華人地區的學習環境下，由「集中性學習」、「由他人 (教師) 安排的」、「精心計畫，定時提問及相關的活動」和「訓練學習者的學習」這些要素構成的景象，在西方人看來卻是重複和以教師爲主導的。

第三次國際數學及科學錄像研究提出了「東方」數學課堂的特性，就如 Ausubel (1968) 所說的「以教師為主導但以學生為中心」(黃毅英, 2004, 2005a; Leung, 2004)。Watkins & Biggs (2001) 亦提出這種「以學習為中心」(learning centered)——有別於「以學習者為中心」——的華人課堂常規的狀況。在這個環境中，學生看似被動但知性投入，教師主導但同時監察 (monitor) 學生的學習，並作出適時的調整，以大班教學但在課後處理個別差異 (包括個人輔導) (Wong, 2004)。這也許在某個程度來說描述了華人課堂學習的現況。

Wong (2006) 更審視了書法、武術、篆刻這三個傳統，觀察到它們從「入法」到「出法」的教學安排。反觀數學課堂教法，可能是在有規範的課堂常規內進行基本功的訓練 (「入法」)，再利用各種啓導，引發創意思維等高層次思維能力 (「出法」)。在「入法」之後，透過各種「變」打開「出法」之門的這個想法，可能對如何築建由基礎到高層次能力之路有所啓示。

變異教學理論與變式教學： 找尋基礎與高層次思維能力間的橋樑

自 20 世紀 90 年代中期起，Marton 等人 (包括 Bowden & Marton, 1998; Marton & Booth, 1997; Runesson, 1999) 開始重新檢視現象圖式學的過往成果，首先認定變異 (variation) 是達致審辨 (discernment) 的要素，而由審辨再進至不同層次的理解。宏觀而言，學生的「經驗空間」(lived space) 愈闊，學生的學習結果空間 (outcome space) 理應愈闊。透過在經驗空間中引入變異，學生的理解就應該愈豐富 (Wong, Marton, Wong, & Lam, 2002)，由是提出了「變異教學理論」(pedagogy of variation) (祁永華、謝錫金、岑紹基, 2005; Marton, Runesson, & Tsui, 2003; Runesson, 1999)。

2000 年，黃毅英、林智中、黃家鳴的研究小組得到了 Marton 的參與，進行了「透過有系統地引入變異促進學生數學問題解決能力」的

研究，得出了有用的結果。總的來說，透過引入非常規題，不只學生的數學觀擴闊了，他們解決數學開放題的能力亦有所提高（Wong, Chiu, Wong, & Lam, 2005; Wong, Lam, Wong, & Chiu, 2005）。研究進一步發現，引入變異的成效視乎非常規題的「劑量」及學生的水平而定。簡單來說，中、高水平的學生受惠於高劑量的非常規題，而學習成績稍遜的學生只能接受低劑量的非常規題。而且，過量的開放題會引起學生的恐懼（Wong, Chiu, et al., 2005; Wong, Lam, et al., 2005）。從這次研究經驗中可以看到，老師不能只是一般地透過引進開放題而試圖拓展學生的經驗空間，藉以提升他們的高層次思維能力，更需要更細緻地鋪排適當的腳手架，循序漸進地引入變化。

與此同時，20世紀80年代顧泠沅等人於上海青浦進行了長期的變式教學實驗。Marton與顧泠沅於2001年會面，在理論與實踐之間得到結合。據Gu, Marton, & Huang（2004）的分析，Marton理論對概念形成有較強的基礎，而顧泠沅的做法對解決數學問題技巧的提升很有成效，但基調都是透過有系統地引入變化，令學生不單可拾級而上，其理解亦可得到深化。

從上面的分析和實證研究的啓示，筆者更加相信，要透過「變化」搭建由基本功到高層次思維能力的橋樑，需要先整理出一套數學變式課程的設計原理和相同的框架（詳見黃毅英、林智中、孫旭花，2006）。整個課程設計原理對照着數學和數學教育的本質，就是由各種實質問題歸納出數學概念，於數學體系中進行演繹，最後應用到更多的問題上。於是學生在學習之初，教師需要設計不同的學習情境，透過現實情境的變，引導學生歸納出通則、概念或技巧（變中的不變）。筆者稱這些情境的變為「歸納變式」，其目的是形成概念或通則，讓學生從現實情境提升到抽象層面。

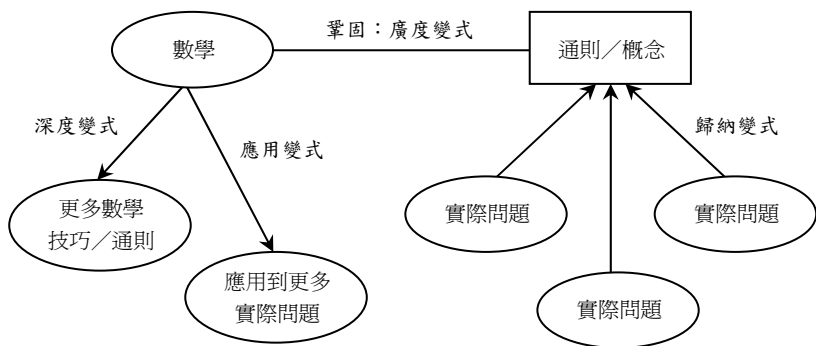
在形成通則或概念之後，學生需要熟習這些通則或概念。教師透過有系統地改變給學生演練的數學題，以鞏固其中涉及的技巧。其中包括數字上的變（由個位數變為多位數、小數、分數、大數等）或所呈現形式的變等，但當中不涉及新的技巧。這稱為「廣度變式」。

技巧鞏固了後，透過數學題形式或內容的變，可引進更多相類的技巧。例如由整數除法推到分數除整數、分數除分數等。雖然均只涉及單一的除法概念，但不論對除法的理解和技巧都不同了。這就涉及「深度變式」。

最後，把學得的技巧、通則等應用到更多情境中，這種情境（所謂「應用題」）的變就稱為「應用變式」（見圖一）。

這四種變式就成為我們變式數學課程的基本元素。

圖一：變式數學課程基本框架



數學變式課程設計的落實

在確立了變式教學的理論架構後，究竟應如何把這個理論落實到課程設計上呢？本文嘗試選擇小學第二學習階段（高小）中的三個課題（速率、立體體積及棒形圖），按變式教學理念發展出具體教材。這三個課題來自香港小學數學科課程其中兩個不同的範疇，分別是度量（速率、立體體積）和數據處理（棒形圖）。

在發展這套教材時，並不是要為數學課程另闢蹊徑，而是參考現行的課程及教科書，找出當中脈絡和骨幹，再按變式教學理論將整個教學流程合理化，讓學生利用為他們搭建的腳手架跨越難點，拾級而上。本文希望透過這三個課題的案例，把變式教學的具體運作理念體現出來。

速率

在分析課程及現行教科書後，可以看到這一課題的知識結構基本上涉及三道公式，就是：

$$\text{速率} = \text{距離} \div \text{時間} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

$$\text{距離} = \text{速率} \times \text{時間} \dots\dots\dots \textcircled{2}$$

$$\text{時間} = \text{距離} \div \text{速率} \dots\dots\dots \textcircled{3}$$

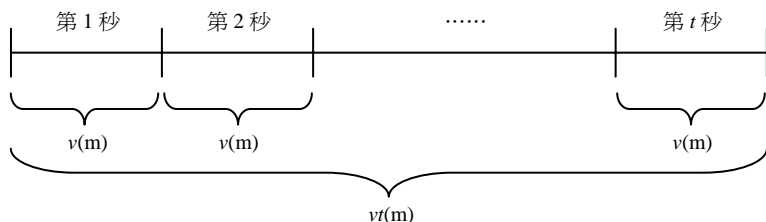
公式①可以說是一種定義。但如何把公式①、②、③連繫起來？怎樣使學生看到它們不是三道只有算式（代數）關係的公式呢？

此外，雖然公式①是一種定義，但它在理念層面從何而來？其實速率可以看成是千千萬萬種「率」之一。筆者認為可從一些生活上的例子，如「大食王」小林尊吃漢堡包的率（當然指平均率）、香港的出生率、姊姊包餃子的率、學校網頁的點擊率和媽媽編織頸巾的速率等，讓學生歸納到「速率」這個概念，這就是歸納變式。

在小學階段，理論上學生不懂代數式的移項，由公式①到公式②就需要用另一種方式去理解了。例如，除的「還原」（逆）就是乘，既然速率 = 距離 ÷ 時間，那麼距離 = 速率 × 時間，小學生應在先前的學習中有多次接觸過「還原」的觀念，應該順理成章。但教師還可以進一步用圖解法去鞏固其中的概念（見圖二）。

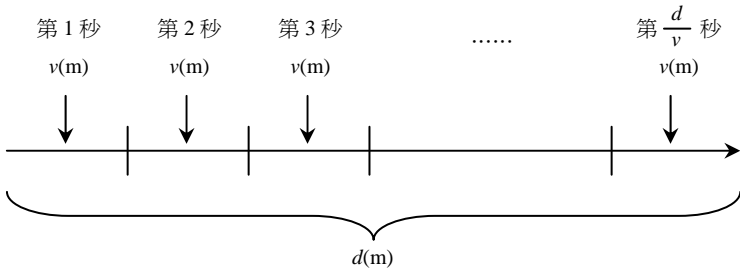
從圖二中，若速率為 $v(\text{m/s})$ ，1 秒後走了的距離為 $v(\text{m})$ ，2 秒後為 $2v(\text{m})$ ，因此 t 秒後為 $vt(\text{m})$ ，這就知道了距離 = 速率 × 時間。

圖二：距離 = 速率 × 時間



從公式②到公式③，教師最初亦是用代數方式（或「還原」）讓學生理解，但部分學生會不太明白代數符號之間的互換關係而感到混亂，因此利用圖像解釋會使他們更清楚時間與距離、速率的關係。

圖三：時間 = 距離 ÷ 速率



若速率為 $v(\text{m/s})$ ，即每秒走了 $v(\text{m})$ ，現在已知全程長 $d(\text{m})$ ，從圖三可見，要找出 $d(\text{m})$ 以內有多少個 $v(\text{m})$ ，這正是包含除的意義，學生很容易理解及找出需時 $\frac{d}{v}(\text{s})$ 才能走畢全程，這就知道了時間 = 距離 ÷ 速率。

至於應用題方面，變式的理念對於教學設計可以有不少幫助。透過題型分析，就可將各種應用題循序漸進地讓學生掌握。整個設計的概念見圖四。

體積

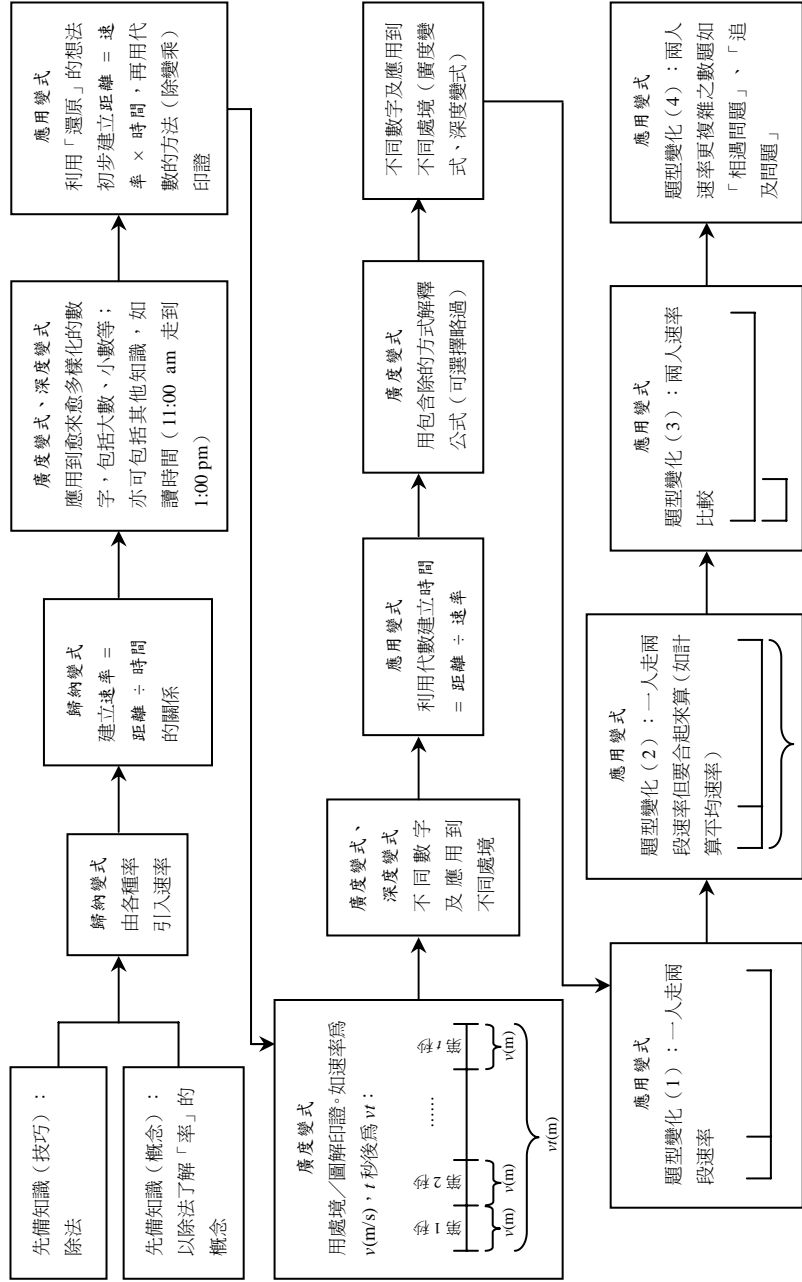
體積這個課題的特色與速率類似，當中涉及的技巧不多，就是：

$$\text{立方體體積} = (\text{邊長})^3$$

$$\text{長方體體積} = \text{長} \times \text{闊} \times \text{高} = \text{底面積} \times \text{高}$$

它不會像學習課題中牽涉到密鋪（「中間人」）的概念，但這種類似平面面積密鋪的想法就隱含在「排水法」²中所顯現的體積可加性

圖四：速率課變式設計概念圖



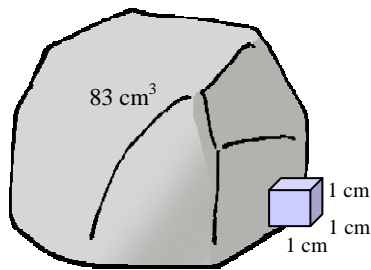
上。由這「可加性」，較複雜的體積就可以用「加減法」來計算（即把立體分拆成幾部分去計算，或把它變成大立體減去其中一部分來計算）。

在處理這課題時，首先用伊索寓言中烏鴉飲水的故事說明物體佔有體積，之後用曹聰稱象的故事引伸體積的可加性。不過要注意：曹聰稱象涉及重量，而這課題是處理體積，所以必須把石塊全浸入水中。

奠定了可加性後，我們就可計算以下的數學題：

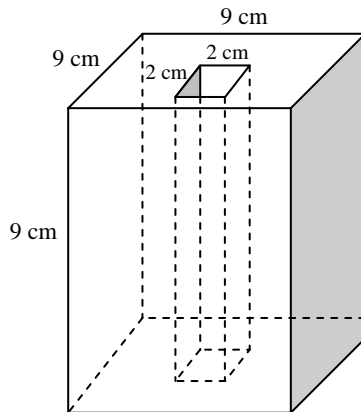
算一算，下面（圖五）這件物件的體積是多少？

圖五：體積的可加性



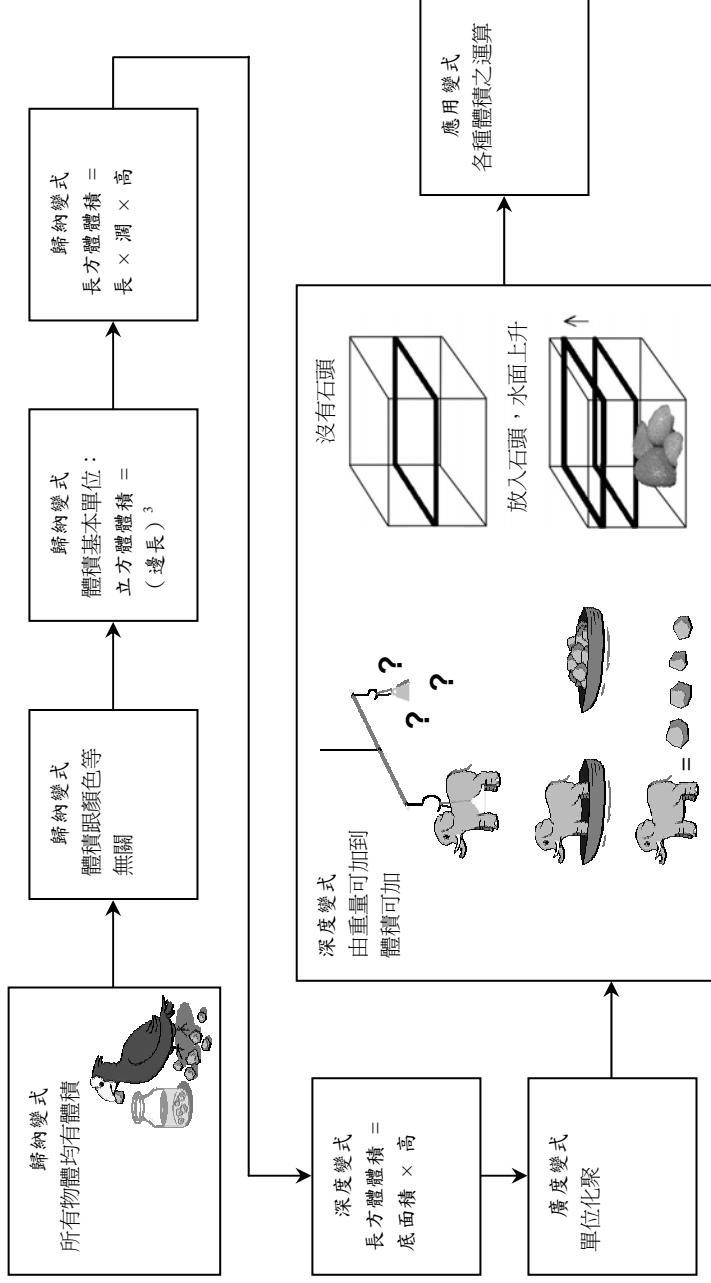
又或利用「加減法」計算下題（圖六）：

圖六：利用體積的可加性計算不常見立體的體積



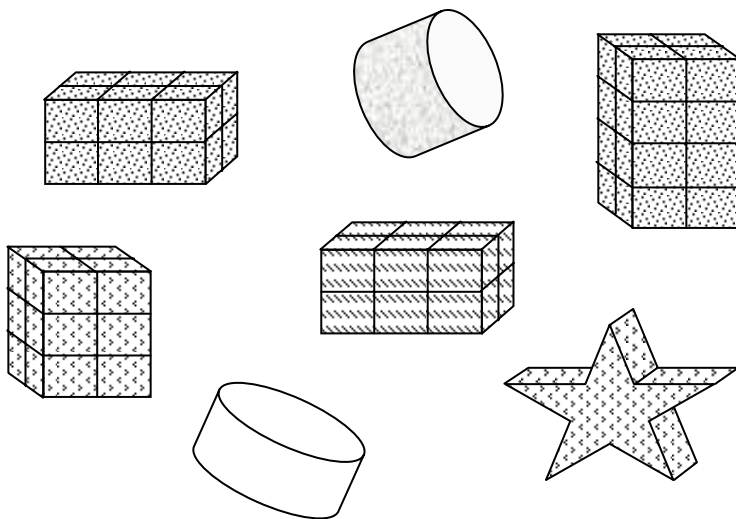
這就得出圖七的概念圖。

圖七：體積課變式設計概念圖



從教科書的分析可見，時下的教科書較少注意協助學生建立體積概念。也許是因為它不涉及運算的緣故，故為人所忽略。其實，學生往往會誤以為體積與重量有關。筆者認為由例子與非例子的變化來引導出審辨是十分有效的概念形成方法。所以透過圖八的活動（最好以實物進行），可以鞏固學生對體積的概念。

圖八：概念與非概念的認定



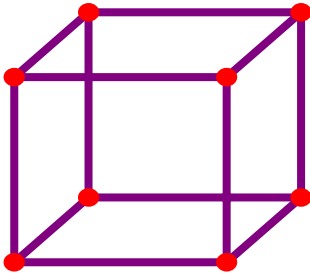
看看上面的物件（不同灰底或紋理表示不同物料），把體積相同的分別用相同顏色的筆圈出來。

接着，再進一步利用變與不變，讓學生掌握和熟習面積／體積的不同面相（圖九）。

圖九：變與不變

一立方米的體積有多大？

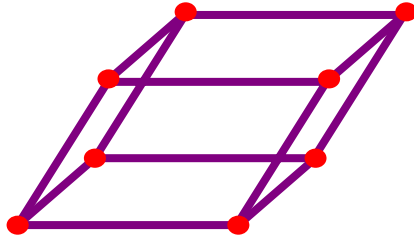
要體驗一立方米的體積的大小，只要用 12 根一米長的尺子或木條組成一個邊長 1 米的立方體框架，便知道了。



你知道這個一立方米的
正方體框架內能夠站多少
位同學嗎？

(a) 「源活動」——利用支架構作邊長 1 米的立方體

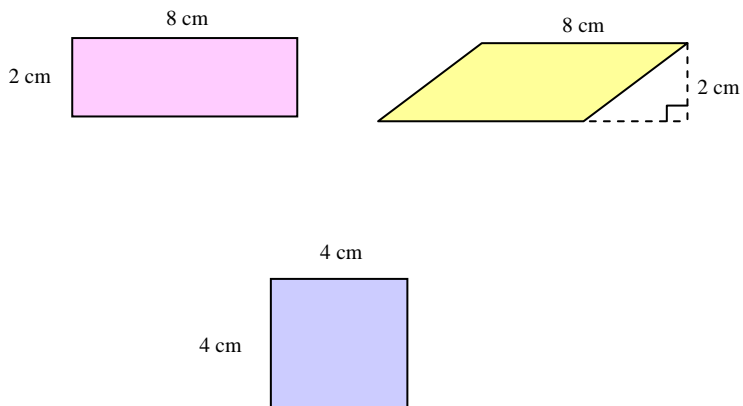
如果把框架壓扁了，它的體積、面積和木條的總長度分別起了甚麼變化？



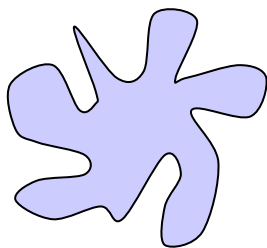
(b) 「變式活動」——考察變與不變

圖九（續）

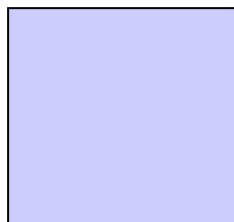
哪些（面積／周界）相同？哪些不相同？



(c) 「變式活動」——考察平面中變與不變



湖泊

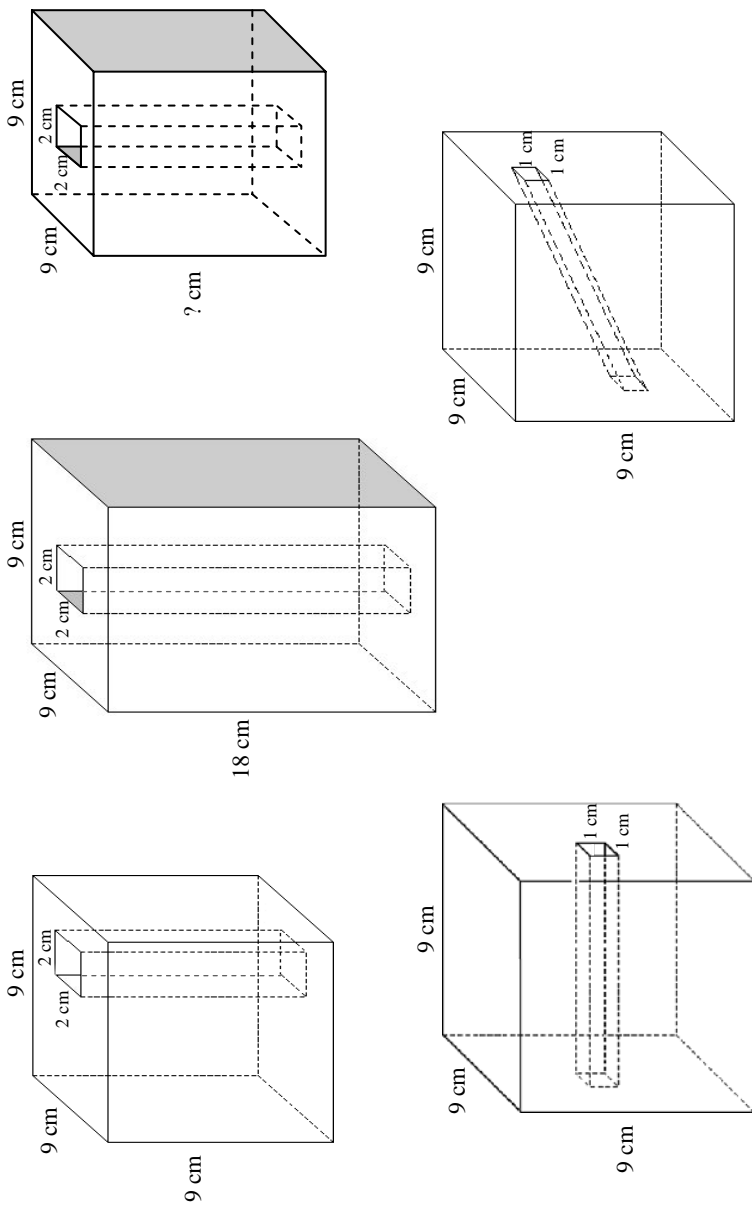


水池

(d) 「變式活動」——考察平面中變與不變的續後討論

最後，我們再透過變式題讓學生靈活運用體積的計算（圖十）。

圖十：變式題組——求各立體體積及各立體鑽孔前與鑽孔後體積的比



棒形圖

棒形圖一課所涉及的技巧亦不算複雜，主要有兩大類，即棒形圖和複合棒形圖。每類中間又有一些變化：棒形圖分 1 格代表 50 個單位，或 1 格代表 100 個單位，而複合棒形圖除了 1 格所代表的單位外，亦有並列式和接疊式之分。

前面兩個課題變式對新概念的形成功能發揮作用。本課題的特點是與日常生活密切相關，故在設計上充分運用了處境上的變去讓學生有更強的統計意識。

統計的作用在於通過對數據的收集、整理和分析，為人們更好地制定決策提供依據和建議。所以除了上述這些統計的技巧外，統計的課題還應幫助學生建立統計觀念，亦即認識到統計對決策的作用，能從統計的角度思考與數據有關的問題；能通過收集數據、描述數據、分析數據，作出合理的決策；能對數據的來源、收集和描述數據的方法、由數據而得到的結論等作合理的質疑。在培養統計觀念這方面，變式教學大有可發揮之處。

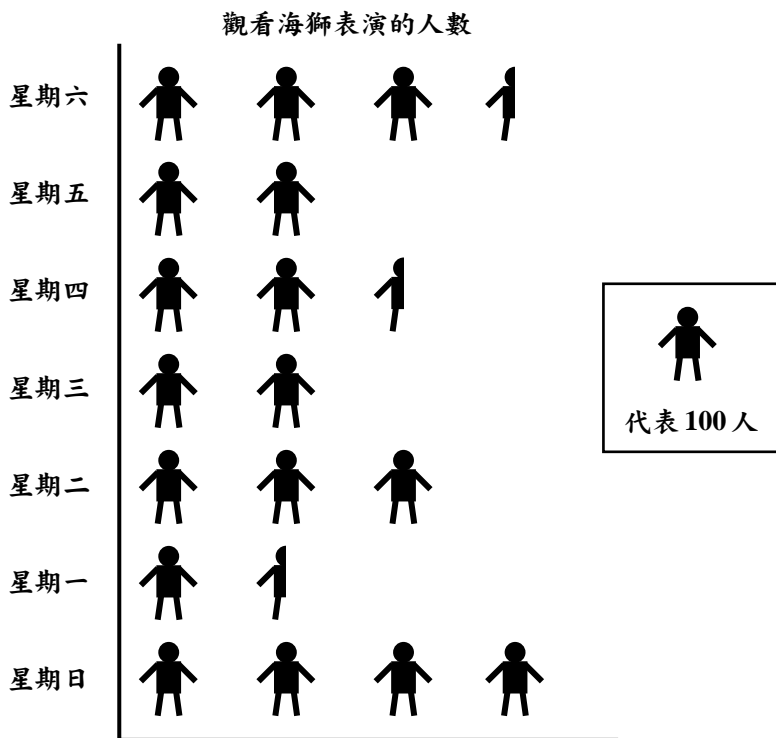
首先，在資料搜集方面，除了提供人工的數據、模擬的情境外，還要求學生自己搜集和整理數據，例如在同學當中搜集資料，或上網搜尋數據（如到香港天文台的網頁 <http://www.weather.gov.hk/contentc.htm> 找尋香港的降雨資料）。比較特別的是，其中一種資料來源是另一個統計圖。例如先給出象形圖，讓學生閱讀象形圖，然後再依據從象形圖中獲取的數據製作棒形圖（見圖十一）。

雖然象形圖與棒形圖有不同的作用，很少會產生混淆，但這種做法使數據的來源多樣化。這樣的變化能使學生靈活貫通，亦讓學生開闊想法。期間亦加插了統計表的製作，又介紹了用電腦報表（如 Microsoft® Excel）整理數據，學生可完整地經歷「數據的收集（獲取信息）——數據的整理（統計表）——數據的描述（統計圖）——數據的分析（詮釋與討論）」這整個統計的過程。

圖十一：從另一個統計圖製作棒形圖

海獅表演

海獅訓練員把上星期每天來觀看海獅表演的遊客數量製作成統計圖。



至於統計圖的詮釋方面，筆者從簡單的讀圖出發，如「爸爸的鞋店」一課，然後讓學生討論原因，亦包括提出建議（見圖十二）。

筆者還編入了非常規的統計圖，如圖十三和圖十四，旨在透過統計圖形式上的變化擴展學生的視野，使能靈活分析信息。

圖十二：棒形圖——討論原因

爸爸的鞋店

小敏的爸爸開了一家鞋店，小敏把去年下半年售出的涼鞋數量做了統計。

月份	7	8	9	10	11	12
銷售數量（雙）	350	320	190	100	30	10

1. 根據表格中的數據製作棒形圖。
2. 爸爸的鞋店下半年一共銷售涼鞋 _____ 雙。
3. 小敏爸爸的鞋店下半年涼鞋的銷量有甚麼變化？可能是甚麼原因？

4. 如果每月賣出 80 雙涼鞋便能收回成本，那麼爸爸的鞋店在下半年哪幾個月有盈利？哪幾個月則虧本？

小敏又把去年下半年爸爸鞋店中銷售運動鞋的數量做了統計。

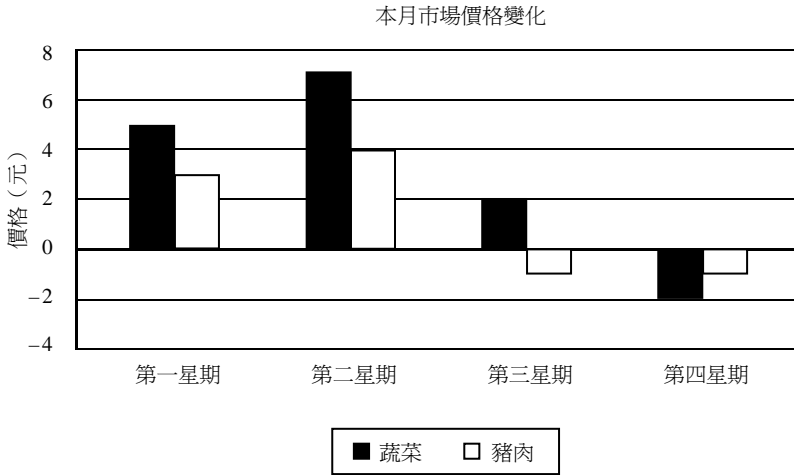
月份	7	8	9	10	11	12
銷售數量（雙）	122	145	138	184	203	247
取近似值至十位（雙）						

5. 把運動鞋銷售的數量取近似值至十位，填在表格中。
6. 根據整理後的數據製作棒形圖。
7. 從棒形圖中可以看出，運動鞋銷售量最多的是 _____ 月，最少的是 _____ 月。
8. 爸爸的鞋店下半年一共銷售運動鞋 _____ 雙。
9. 下半年運動鞋銷售量有甚麼變化？可能是甚麼原因？

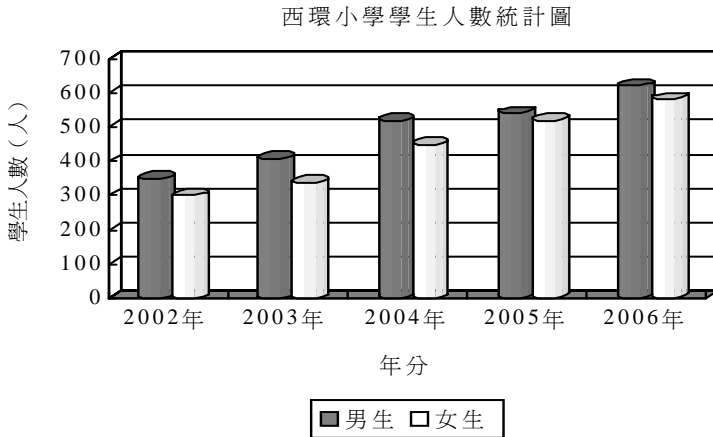
10. 比較兩個棒形圖，下半年銷售涼鞋的數量變化與銷售運動鞋的數量變化有甚麼不同？

11. 小敏的爸爸要去入貨了，請給他一些建議。

圖十三：複合棒形圖——形式上的變化



圖十四：複合棒形圖——形式上的變化

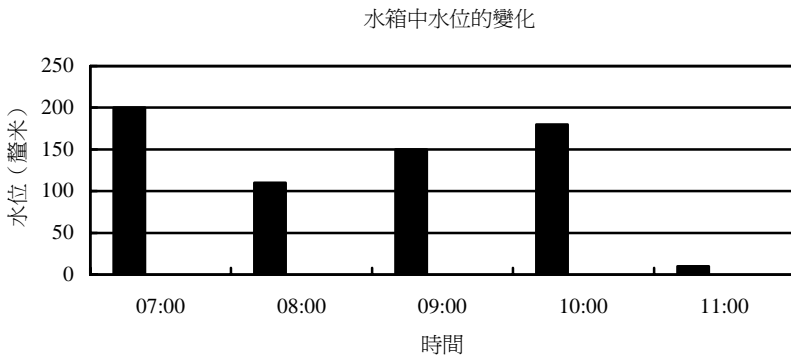


接着又加入了插圖編故事，通過編題來建立這種高層次思維能力。

例題：

下面（圖十五）的棒形圖顯示的是一個小區某天上午水箱中水位的變化情況，你能根據圖中水位的變化情況編一個小故事嗎？

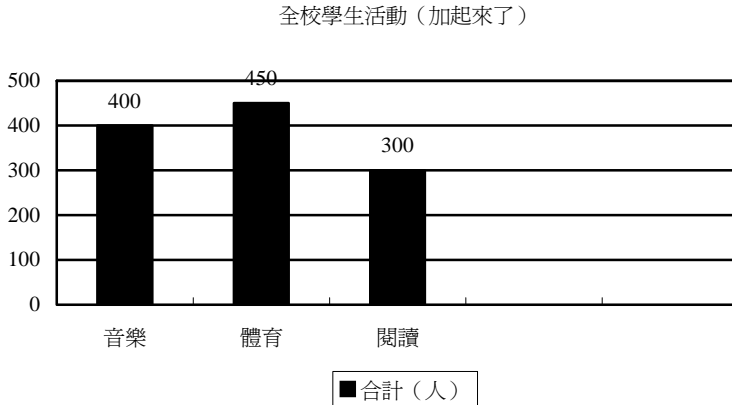
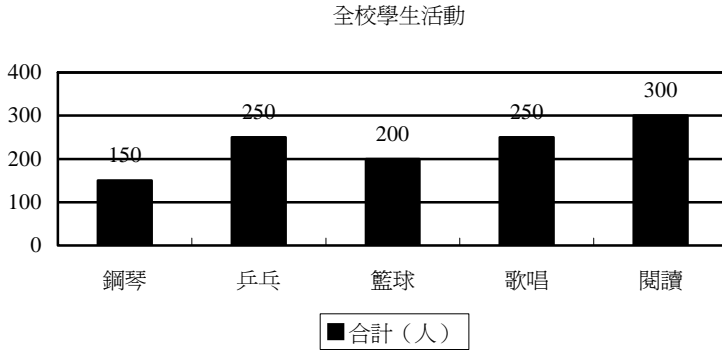
圖十五：編故事



在課題裏亦加插了不少比較，例如：（1）先製作以 1 格代表 50 的棒形圖，再以此為基礎製作以 1 格代表 100 的棒形圖，而非獨立地製作後者；（2）以象形圖製作棒形圖後，讓學生比較兩圖的優劣（適用性）；（3）製作了並列式複合棒形圖和接疊式複合棒形圖後，讓學生比較兩種複合棒形圖的不同之處；（4）讓學生比較如圖十六的棒形圖組等。透過比較方式，讓學生體會變化中的不變，使他們對統計圖有更深的理解。

當然課題中還有不少應用變式，於是最後便得出圖十七的棒形圖教材設計流程。

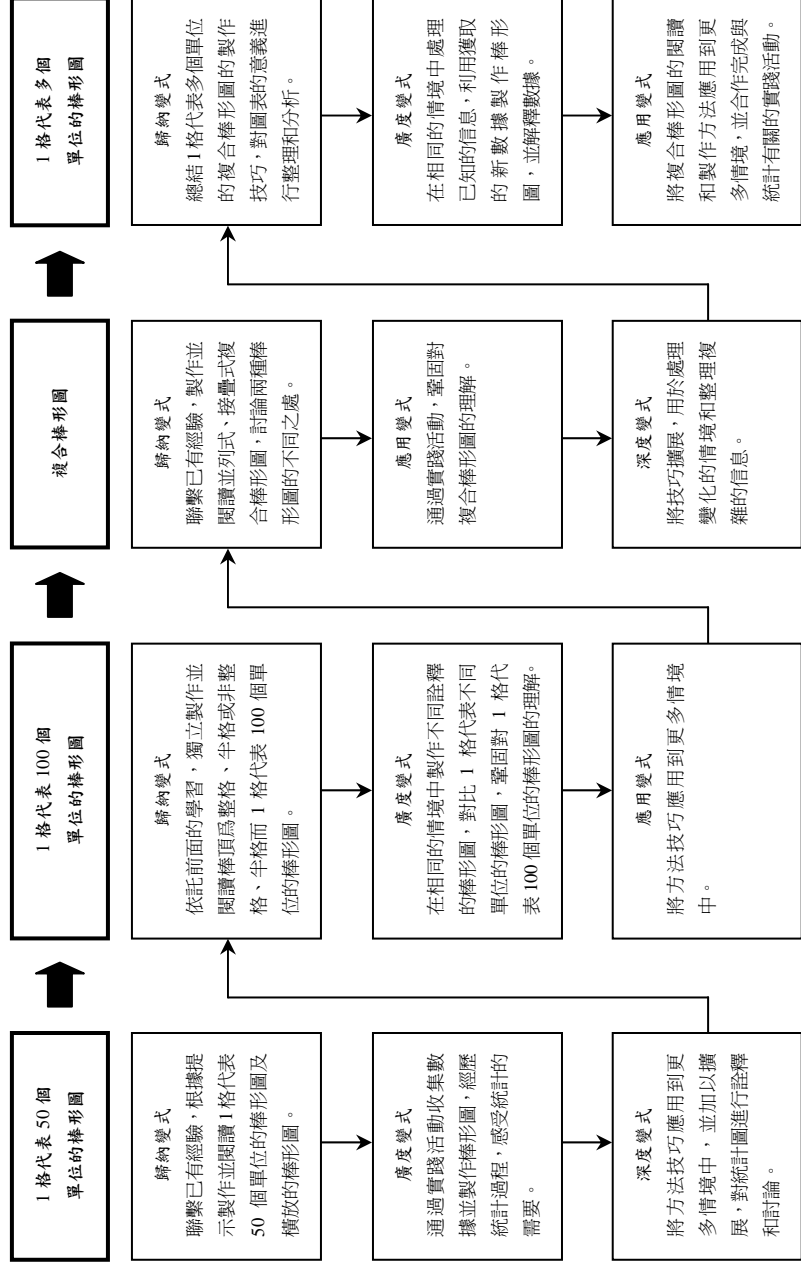
圖十六：不同組合影響詮釋



結 論

通過這三個課題的設計，筆者一方面希望闡述數學變式課程的設計原理，另一方面亦說明如何落實這些原理。研究結果顯示，速率和體積這兩個課題在初步試教中得到了成效，但仍可進一步改良設計，希望除了有助學生的數學成績和解決數學問題的表現外，亦對學生的數學情感和數學觀產生作用。筆者希望透過更細微的研究，測試這些方面的成效，亦嘗試透過實地研究，探視這種教學如何在學生中產生作用。

圖十七：棒形圖設計流程



最後必須指出，筆者無意把這三個課題作為變式課程的樣板。因為變式教材能否達到預期效果，關鍵在於老師能否掌握變式課程設計的原理，了解哪些可變、哪些不變，以及如何透過變去突出不變。否則，照本宣科將不會對學習數學有些甚麼幫助。

鳴謝

這項研究蒙現代教育研究社及香港中文大學直接資助撥款（Direct Grant for Research）資助，謹此致謝。

註釋

1. 20世紀70年代小學數學配合活動教學而推行，有關方面提出「沒有眼淚的教學」，教育電視並於1975年製作同名電視節目。
2. 現時「排水法」是放在小六課程的。筆者這種安排是因為這個實驗的目的主要是讓學生感受到甚麼是「物件佔有一定的空間大小」，從而帶出「體積」這一概念。在教授這課題前，毋須向學生提及甚麼是「排水法」。

參考文獻

- 李子建（編著）（2002）。《課程、教學與學校改革：新世紀的教育發展》。香港：中文大學出版社。
- 祁永華、謝錫金、岑紹基（編）（2005）。《變異理論與學習空間》。香港：香港大學出版社。
- 黃毅英（1995）。〈普及教育期與後普及教育期的香港數學教育〉。載蕭文強（編），《香港數學教育的回顧與前瞻》（頁69–87）。香港：香港大學出版社。
- 黃毅英（2004）。〈從各地數學課程改革看數學教育面對的幾個問題〉。載裴娣娜（主編），《兩岸四地中、小學數學課程與教學改革學術論壇論文集：數學教育與學生發展》（頁31–36）。澳門：教育暨青年局。

- 黃毅英 (2005a)。〈從香港「以兒童為中心」小學數學課程改革談起：尋找從「基礎」通到「高層次思維能力」之路基於學生發展的數學教學探索〉。載天津師範大學教育科學學院 (編)，《兩岸四地數學課程與教學第二屆學術研討會論文集：基於學生發展的數學教學探索》(頁 32-35)。天津：天津師範大學教育科學學院。
- 黃毅英 (2005b)。〈通識教育：一個遙不可及的夢——這究竟是否我們的夢?〉。《教師中心傳真》，第 55 期，頁 6-7。
- 黃毅英、林智中、孫旭花 (2006)。《變式課程設計原理——數學課程改革的可能出路》(學校教育改革系列之 33)。香港：香港中文大學教育學院、香港教育研究所。
- 黃毅英、黃家樂 (2001)。〈「新數學」運動的過程及對當代數學教育之啓示〉。載黃毅英 (編)，《香港近半世紀漫漫「數教路」：從「新數學」談起》(頁 9-111)。香港：香港數學教育學會。
- 鄧國俊、黃毅英、霍秉坤、顏明仁、黃家樂 (2006)。《香港近半世紀漫漫「小學數教路」：現代化、本土化、普及化、規範化與專業化》。香港：香港數學教育學會。
- Ausubel, D. P. (1968). Facilitating meaningful verbal learning in the classroom. *The Arithmetic Teacher*, 15, 126-132.
- Bowden, J., & Marton, F. (1998). *The university of learning*. London: Kogan Page.
- Clark, J. L., Scarino, A., & Brownell, J. A. (1994). *Improving the quality of learning: A framework for Target-oriented Curriculum renewal in Hong Kong*. Hong Kong: Hongkong Bank Language Development Fund; Institute of Language in Education.
- Delors, J. (1998). *Learning: The treasure within*. Paris: UNESCO.
- Gu, L., Marton, F., & Huang, R. (2004). Teaching with variation: A Chinese way of promoting effective mathematics learning. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 309-347). Singapore: World Scientific.
- Howson, G., & Wilson, B. (Eds.). (1986). *School mathematics in the 1990s*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Huang, R. J. (2002). *Mathematics teaching in Hong Kong and Shanghai: A classroom analysis from the perspective of variation*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Hong Kong, Hong Kong.

- Leung, F. K. S. (2004). The implications of the Third International Mathematics and Science Study for mathematics curriculum reforms in Chinese communities. In D. N. Pei (Ed.), 《兩岸四地中、小學數學課程與教學改革學術論壇論文集：數學教育與學生發展》 (Proceedings of the academic forum on the curriculum and teaching reforms in primary and secondary mathematics among the four regions across the strait: Mathematics education and student development) (pp. 122–138). Macau: Education and Youth Affairs Bureau.
- Marton, F., & Booth, S. (1997). *Learning and awareness*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Marton, F., Runesson, U., & Tsui, A. B. M. (2003). The space of learning. In F. Marton & A. B. M. Tsui (with P. Chik, P. Y. Ko, M. L. Lo, I. A. C. Mok, D. Ng, M. F. Pang, W. Y. Pong, & U. Runesson) (Eds.), *Classroom discourse and the space of learning* (pp. 3–42). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Mathematical Association. (1955). *The teaching of mathematics in primary schools: A report prepared for the Mathematical Association for consideration by all concerned with the development of young children*. London: G. Bell & Sons.
- Mathematics Sciences Education Board. (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.
- National Advisory Committee on Mathematics Education. (1975). *Overview and analysis of school mathematics, Grades K–12*. Washington, DC: Conference Board of the Mathematical Sciences.
- Organisation for Economic Co-operation and Development. (1996). *Lifelong learning for all*. Paris: Author.
- Runesson, U. (1999). *Variationens pedagogik: Skilda sätt att behandla ett matematiskt innehåll* [in Swedish] (The pedagogy of variation: Different ways of handling a mathematical topic). Göteborg, Sweden: Acta Universitatis Gothoburgensis. English summary retrieved December 1, 2000, from <http://www.ped.gu.se/biorn/phgraph/civial/graphica/diss.su/runesson.html>

- Watkins, D. A., & Biggs, J. B. (Eds.). (2001). *Teaching the Chinese learner: Psychological and pedagogical perspectives*. Hong Kong: Comparative Education Research Centre, The University of Hong Kong.
- Wong, N. Y. (2004). The CHC learner's phenomenon: Its implications on mathematics education. In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 503–534). Singapore: World Scientific.
- Wong, N. Y. (2006). From “entering the way” to “exiting the way”: In search of a bridge to span “basic skills” and “process abilities.” In F. K. S. Leung, K.-D. Graf, & F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics education in different cultural traditions — A comparative study of East Asia and the West: The 13th ICMI study* (pp. 111–128). New York: Springer.
- Wong, N. Y., Chiu, M. M., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2005). The lived space of mathematics learning: An attempt for change. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education*, 9(1), 25–45.
- Wong, N. Y., Han, J. W., & Lee, P. Y. (2004). The mathematics curriculum: Towards globalisation or Westernisation? In L. Fan, N. Y. Wong, J. Cai, & S. Li (Eds.), *How Chinese learn mathematics: Perspectives from insiders* (pp. 27–70). Singapore: World Scientific.
- Wong, N. Y., Lam, C. C., Wong, K. M., & Chiu, M. M. (2005, August). *Changing students' mathematics problem solving performance and conception of mathematics through the systematic introduction of variation*. Paper presented at the 3rd East Asia Regional Conference on Mathematical Education, Shanghai/Hangzhou, China.
- Wong, N. Y., Marton, F., Wong, K. M., & Lam, C. C. (2002). The lived space of mathematics learning. *Journal of Mathematical Behavior*, 21(1), 25–47.

**The Design of Mathematics Spiral *Bianshi* Curriculum:
Using Three Primary Mathematics Topics as Examples**

Ngai-Ying WONG, Chi-Chung LAM, Anna Mei-Yan CHAN, &
Yan-Ling WANG

Abstract

Developments in learning theories and researches have shown that spiral bianshi curriculum can become a bridge from “basic skills” to the development of various process abilities in the learning of mathematics. In other words, students can acquire basic skills and develop higher-order thinking competences at the same time. In this article, attempt is made to illustrate the principles of designing spiral bianshi curriculum using three mathematics topics at senior primary level as examples.